Aufgabe 1 (*Rotationsflächen mit $H = 0$*)
Bestimmen Sie alle Flächen $F : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(t,\theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, t)$ für $r(t) > 0$, mit mittlerer Krümmung $H \equiv 0$.

Aufgabe 2 (*Parallelflächen*)
Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^3-Fläche mit Normale N und Hauptkrümmungen $a \leq \varkappa_{1,2} \leq b$, wobei $a < 0 < b$. Zeigen Sie, dass für $-1/b < s < -1/a$ die Parallelfläche

$$F^s : U \to \mathbb{R}^3,\ F^s(x) = F(x) + sN(x),$$

regulär ist, und beweisen Sie für die Hauptkrümmungen die Formel

$$\varkappa_i^s = \frac{\varkappa_i}{1 + s\varkappa_i}.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Weingartengleichung.

Aufgabe 3 (*Konforme Parametrisierung von Minimalflächen*)
Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine Minimalfläche ($H = 0$) mit erster Fundamentalform g, Normale N und Gaußkrümmung K. Zeigen Sie:

(1) Ist K nirgends Null, so erfüllt $N : U \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ für eine geeignete Funktion $\lambda > 0$

$$\langle DN \cdot v, DN \cdot w \rangle = \lambda^2\, g(v,w) \quad \text{auf } U.$$

(2) Sei $\pi_- : \mathbb{S}^2 \backslash \{-e_3\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Südpol, vgl. Serie 6, Aufgabe 1. Ist $N(w) = e_3$, so gibt es eine Umgebung W von w, so dass $\phi = \pi_- \circ N : W \to \phi(W)$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus ist, und $\tilde{F} = F \circ \phi^{-1}$ ist konform parametrisiert.

Bemerkung. Da wir die Fläche beliebig drehen können, erhalten wir lokal winkeltreue Parametrisierungen in allen Punkten mit $K \neq 0$.

Aufgabe 4 (*Konvexe Hülleneigenschaft*)
Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit $F(U) \subset \overline{B_R(0)}$. Es gebe ein $x \in U$ mit $|F(x)| = R$. Zeigen Sie:

(1) Bei geeigneter Wahl der Normalen N gilt $F(x) = -RN(x)$.

(2) Bezüglich der Normalen in (1) hat F in x Hauptkrümmungen $\varkappa_{1,2} \geq 1/R$.

Sei jetzt $U \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und $F \in C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^3)$, so dass $F|_U$ reguläre Fläche mit Gaußscher Krümmung $K \leq 0$ ist. Zeigen Sie, dass $F(\overline{U})$ in der konvexen Hülle von $F(\partial U)$ enthalten ist. Verwenden Sie dazu

$$\operatorname{conv}(F(\partial U)) = \bigcap_{F(\partial U) \subset B_R(p)} B_R(p).$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, den 06.07.11.